ΑΣΚΗΣΗ 1η

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ χρησιμοποιώντας τους σύνθετους κανόνες Τραπεζίου - Simpson όταν η f δίνεται από:

x_i	-2	-1	0	1
$f(x_i)$	2	0	0	2

ΛΥΣΗ

Γενικά, $Q_5^{Tp}(f) = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2}\right)$

Άρα, $Q_5^{Tp}(f) = \frac{2}{2} + 0 + 0 + 2 + \frac{6}{3} = 6$

Γενικά, $Q_5^{Sim}(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right)$

Άρα, $Q_5^{Sim}(f) = \frac{1}{3}\left(2 + 4\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot 2 + 6\right) = \frac{16}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Δοθέντος ότι η f δίνεται από τον πίνακα τιμών

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	-15	-4	-1	0	5	20

είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, να βρείτε τις ακριβείς τιμές των παρακάτω ολοκληρωμάτων:

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$, $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ και $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$ δίχως να βρεθεί η συνάρτηση f.

ΛΥΣΗ

- $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον σύνθετο τύπο του Simpson με βήμα $h=2$ (ή και τον απλό τύπο του Simpson με βήμα $h=1$)

Άρα, $Q_3(f) = \frac{h}{3}\left(f(-2)+4f(0)+f(2)\right) = \frac{2}{3}\left(-15+4(-1)+5\right) = -\frac{28}{3}$

- $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$: Αφού το "σπάσουμε" σε κατάλληλα ολοκληρώματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Simpson ή και των τριών ογδόων $\left(\frac{3}{8}\right)$ με $h=1$.

Άρα, $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx =$

$= Q_4^{3/8}(f) + Q_3^{Sim}(f) =$

$= \frac{3h}{8}\left(f(-2)+3f(-1)+3f(0)+f(1)\right) + \frac{h}{3}\left(f(1)+4f(2)+f(3)\right) =$

$= \frac{3}{8}\left(-15+3(-4)+3(-1)+0\right) + \frac{1}{3}\left(0+4\cdot 3+2\cdot 0\right) = -\frac{25}{12}$

- $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$: Το "σπάμε" και έπειτα χρησιμοποιούμε Simpson με βήμα $h=1$.

Άρα, $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -\frac{45}{4} - Q_3^{Sim}(f) =$

$= -\frac{45}{4} - \frac{h}{3}\left(f(-1)+4f(0)+f(1)\right) = -\frac{45}{4} - \frac{1}{3}\left(-4+4(-1)+0\right) = -\frac{103}{12}$

ΑΣΚΗΣΗ 3η:

Για την προσέγγιση του ολοκληρώματος

$\int_0^1 x \cdot e^x \, dx$ πρόκειται να εφαρμοστούν οι σύνθετοι τύποι του Τραπεζίου και του Simpson. Ποιο "n" πρέπει να πάρουμε στην κάθε περίπτωση ώστε να εξασφαλιστεί μια ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων;

ΛΥΣΗ

Έχουμε, $f(x) = x \cdot e^x$, $\forall x \in [0,1]$

$f'(x) = e^x(x+1)$, $f''(x) = e^x(x+2)$, $f'''(x) = e^x(x+3)$

και $f^{(4)}(x) = e^x(x+4)$, $\forall x \in [0,1]$

$$\max_{0 \le x \le 1} |f''(x)| = 3e \quad \text{και} \quad \max_{0 \le x \le 1} |f^{(4)}(x)| = 5e$$

- $$|R_{n+1}^{Tp}| = \frac{b-a}{2} h^2 \cdot |f''(\xi)| = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{n^2} |f''(\xi)| \le \frac{3e}{12n^2} = \frac{e}{4n^2}$$

όπου, $\frac{e}{4n^2} \le \frac{1}{2} 10^{-6} \Leftrightarrow n^2 \ge \frac{e}{4} \cdot 2 \cdot 10^6 = \frac{e}{2} \cdot 10^6 \Leftrightarrow n \ge \sqrt{\frac{e}{2}} \, 10^3$

$\Leftrightarrow n \ge 1165,8$, Άρα, απαιτούνται $n = 1166$ βήματα

- $$|R_{n+1}^{Sim}| = \frac{b-a}{180} h^4 \cdot (f^{(4)}(\xi)) \le \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{n^4} 5e \le \frac{e}{36n^4}$$

όπου, $\frac{e}{36n^2} \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow n^4 \ge \frac{e}{18} \cdot 10^6 \Leftrightarrow n \ge \sqrt[4]{\frac{e}{18} \cdot 10^6}$

$\Leftrightarrow n \ge 19,71$, Άρα, απαιτούνται $n = 20$ βήματα

Παρατήρηση:

1) Βλέπουμε ότι η Simpson έχει πιο καλή προσέγγιση από τον κανόνα του τραπεζίου

2) Τα κυκλωμένα $\frac{1}{2}$ μπαίνουν εκεί διότι θέλουμε να το στρογγυλοποιήσει το PC (ή υπολογιστής). Σωστό είναι επίσης, να μην το βάλουμε και καθόλου.